Početní část - 31.1.

1. Najděte všechny rostoucí funkce $y \in C^2([0,1])$, které jsou stacionárním bodem funkcionálu

$$F(y) = \int_0^1 y(x)(y'(x))^2 \mathrm{d}x, \quad y \in C^1([0,1]),$$

   splňujícím okrajové podmínky $0 < y(0) = p < q = y(1)$.

   Spočtěte Gâteauxovu derivaci F v bodě y a ve směru h pro $y, h \in C^1([0,1])$, $h \neq 0$.

   (11 bodů).

2. Vyšetřete bodovou, stejnoměrnou a lokálně stejnoměrnou konvergenci na $(0,\infty)$ posloupností $\{f_n\}$ a $\{f_n'\}$, kde

$$f_n(x) = \frac{\arctan(x^n)}{n}, \quad x \in (0,\infty).$$

   (7 bodů).

3. Spočtěte $\lambda_2(M)$ pro

$$M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, 1 < 3x + 2y < 4, 2x < y < 3x\}$$

   (9 bodů).

4. Spočtěte

$$F(a,b) = \int_0^\infty 2^{-ax} \frac{\sin bx}{x} \, dx$$

   pro $a > 0$ a $b \in \mathbb{R}$ (9 bodů).